

Intégration complexe

Définition. La représentation paramétrique d'une courbe ou chemin C dans le plan complexe est donnée par :

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

La courbe (ou chemin) C est continue si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues .

La courbe (chemin) C est de classe C^1 (lisse) si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , c-à-d les dérivées $x'(t), y'(t)$ sont continues.

Une courbe peut être représentée dans \mathbb{R}^2 par l'équation paramétrique :

$$(x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Si la courbe C est lisse, le vecteur $(x'(t), y'(t))$ est le vecteur tangent à la courbe au point $(x(t), y(t))$.

Exemple.1) La courbe représentée par le graphe $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ a pour représentation paramétrique:

$$(t, f(t)), \quad a \leq t \leq b .$$

Si C est lisse, le vecteur tangent est donné par: $(1, f'(t))$.

Par exemple : le chemin $y = x^2$, $t \in [0, 2]$ a pour vecteur tangent $(1, 2t)$.

Illustration

Exemple.2) Le cercle trigonométrique C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ est représenté par : l'équation paramétrique $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Le vecteur tangent est donnée par : $(-\sin(t), \cos(t))$.

Illustration

Dans C , le cercle est représenté par : $z(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Intégrale curviligne d'un champ de vecteurs.

Introduction

On considère un champ de vecteurs $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) = M(x,y)i + N(x,y)j$ où $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$ est la base canonique de R^2 , $M(x,y)$ et $N(x,y)$ sont deux fonctions numériques continues dans une boule ouverte.

Le travail w associé à un déplacement d'un point A à un point B d'une force constante F est déterminé par: $w = \langle F, \overrightarrow{AB} \rangle$, le produit scalaire de la force F par le vecteur \overrightarrow{AB} .

Soit maintenant C une courbe déterminée par une représentation paramétrique:

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b.$$

Si C est une courbe lisse, par exemple les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ de classe C^1 , et $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ une force variable.

On voudrait calculer le travail de la force F associé à un déplacement le long de la courbe C du point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$.

Le long de cette courbe, la force F est déterminée par le champ de vecteurs :

$$F(x(t), y(t)) = M(x(t), y(t))i + N(x(t), y(t))j, \quad a \leq t \leq b.$$

On considère alors une partition (subdivision) de l'intervalle $[a, b]$,

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Soient $P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$ et $P_i(x(t_i), y(t_i))$ deux points de la courbe C , et le vecteur

$$\overrightarrow{P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))P_i(x(t_i), y(t_i))} = (x(t_i) - x(t_{i-1}))i + (y(t_i) - y(t_{i-1}))j \quad (1).$$

Les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont de classe C^1 , donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe deux nombres c_i , d_i dans $]a, b[$ tels que:

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \text{ et } y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(d_i)(t_i - t_{i-1}).$$

En remplaçant dans (1), on obtient alors :

$$\overrightarrow{P_{i-1}(x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))P_i(x(t_i), y(t_i))} = (x'(c_i)i + y'(d_i)j)(t_i - t_{i-1}).$$

Pour chaque $i = 1, \dots, n$, on considère alors le vecteur constant:

$$F_i = M(x(c_i), y(c_i))i + N(x(d_i), y(d_i))j;$$

comme une approximation de la force $F(x(t), y(t))$ le long de la courbe C du point P_{i-1} au point P_i . On obtient alors une approximation du travail de la force $F(x(t), y(t))$ le long de la courbe C du point P_{i-1} au point P_i , par la formule:

$$\begin{aligned} \Delta w_i &= \langle M(x(c_i), y(c_i))i + N(x(d_i), y(d_i))j, (x'(c_i)i + y'(d_i)j)(t_i - t_{i-1}) \rangle \\ &= M(x(c_i), y(c_i))x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) + N(x(d_i), y(d_i))y'(d_i)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent la somme :

$$S_n = \sum_{i=1}^n M(x(c_i), y(c_i))x'(c_i)(t_i - t_{i-1}) + N(x(d_i), y(d_i))y'(d_i)(t_i - t_{i-1}),$$

est une approximation du travail de la force F associé à un déplacement le long de la courbe C du point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$.

On remarque alors que la somme S_n est une somme de Riemann de la fonction intégrable :

$$h(t) = \langle F(x(t), y(t)), r'(t) \rangle = M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t).$$

Quand $n \rightarrow \infty$; on obtient l'expression:

$$W = \int_a^b h(t)dt = \int_a^b (M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

On définit alors l'intégrale curviligne de la composante tangentielle:

Définition . Soit C une courbe définie par l'équation paramétrique:

$r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, les fonctions dérivées $x'(t)$, $y'(t)$ sont continues.

On définit l'intégrale curviligne de la composante tangentielle $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ d'un champ de vecteurs $F(x, y)$ continu le long de la courbe C par l'expression:

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y)dx + N(x, y)dy &= \int_a^b (M(x(t), y(t))x'(t) + N(x(t), y(t))y'(t))dt \\ &= \int_a^b \langle F(r(t)), r'(t) \rangle dt. \end{aligned}$$

$\langle F(r(t)), r'(t) \rangle$ ou $F(r(t)) \cdot r'(t)$ désignent le produit scalaire usuel dans R^2 .

Cette intégrale est aussi notée $\int_C F \cdot dr$.

Exemple . Un objet se déplace le long de la parabole (t, t^2) du point $A(-1, 1)$ au point $B(2, 4)$.

Déterminer le travail total de la force $F(x, y) = (x^2 + y^2)i + 3x^2yj$, le long de la courbe C .

L'équation paramétrique de la courbe est donnée par $r(t) = (t, t^2)$. Au point A , on a $t = -1$, $t^2 = 1$, et au point B , on a $t = 2$, $t^2 = 4$, donc $-1 \leq t \leq 2$.

On obtient alors:

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 \langle F(t, t^2), (x'(t), y'(t)) \rangle dt = \int_{-1}^2 ((t^2 + t^4)(1) + (3t^2 t^2)(2t))dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 + t^4 + 6t^5)dt = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + t^6 \right]_{-1}^2 = \frac{363}{5}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant un champ de vecteurs dans R^3 :

$$F(x, y, z) = M(x, y, z)i + N(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

où $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ et $k = (0, 0, 1)$ est la base canonique de R^3 .

Les fonctions $M(x, y, z)$, $N(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ sont des fonctions numériques continues dans une boule ouverte de R^3 . La courbe C est déterminée par l'équation paramétrique:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), a \leq t \leq b,$$

les fonctions $x(t)$, $y(t)$, et $z(t)$ sont des fonctions de classe C^1 .

Alors, on définit de la même façon, l'intégrale curviligne de la composante tangentielle $M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ du champ continu de vecteurs

$F(x, y, z)$ le long de la courbe C par :

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \int_a^b \langle F(r(t), r'(t)) \rangle dt \\ &= \int_a^b (M(x(t), y(t), z(t))x'(t) + N(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt. \end{aligned}$$

$\langle F(r(t), r'(t)) \rangle$ ou $F(r(t)) \cdot r'(t)$ désigne le produit scalaire usuel dans R^3 .

Exemple. Si on considère la courbe $C: r(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$,
et le champ de vecteurs $F(x, y, z) = (e^x, xe^z, x \sin(\pi y^2))$ alors l'intégrale curviligne :

$$\begin{aligned} \int_C M(x, y, z)dx + N(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz &= \int_0^1 (e^t + te^{t^3}(2t) + t \sin(\pi t^4)(3t^2))dt \\ &= \left[e^t + \frac{2}{3}e^{t^3} - \frac{3}{4\pi} \cos(\pi t^4) \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3}e - \frac{5}{3} + \frac{3}{2\pi}. \end{aligned}$$

Proposition Si la courbe est définie par des morceaux d'arcs lisses
 C_1, C_2, \dots, C_n alors :

$$\int_C F \cdot dr = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} F \cdot dr.$$

Exemple Calculer l'intégrale curviligne : $\int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy$
le long de la courbe C définie par: le segment C_1 qui relie les points $(-3, -2)$ et $(1, 0)$
et l'arc C_2 du premier quadrant du cercle $x^2 + y^2 = 1$ orienté dans le sens contraire
des aiguilles d'une montre.

L'équation de la droite qui passe par les points $(-3, -2)$ et $(1, 0)$ est donnée par -
 $x = 1 + 2y$, donc on peut représenter le segment C_1 par : $r(t) = (1 + 2t, t)$,
 $-2 \leq t \leq 0$.

La courbe C_2 est représentée par: $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Illustration

Calculons l'intégrale curviligne le long du segment C_1 .

$$\begin{aligned} \int_{C_1} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy &= \int_{-2}^0 (4(1 + 2t)(t)(2) + (2(1 + t)^2 - 3(1 + 2t)(t)(1)))dt \\ &= \int_{-2}^0 (18t^2 + 13t + 2)dt = 26. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale curviligne le long de l'arc C_2 .

$$\begin{aligned} \int_{C_2} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (4(\cos(t)) \sin(t)(-\sin(t)) + (2(\cos^2(t) - 3(\cos(t) \sin(t)(\cos(t))))dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-4(\cos(t)) \sin^2(t) + 2 \cos^3(t) - 3 \cos^2(t) \sin(t))dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-4(\cos(t)) \sin^2(t) + 2 \cos(t)(1 - \sin^2(t)) - 3 \cos^2(t) \sin(t))dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos(t) - 6(\cos(t)) \sin^2(t) - 3 \cos^2(t) \sin(t))dt = -1. \end{aligned}$$

D'après la proposition, on a:

$$\begin{aligned} \int_C 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy &= \\ \int_{C_1} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy + \int_{C_2} 4xydx + (2x^2 - 3xy)dy &= 26 - 1 = 25. \end{aligned}$$

Indépendance d'une intégrale curviligne par rapport au chemin.

Théorème. Soit F un champ de vecteur qui dérive d'un potentiel $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $\nabla f = F$ dans une boule ouverte U .

Alors la valeur de l'intégrale curviligne $\int_C F \cdot dr$ est la même pour toutes les courbes lisses C dans U reliant deux points A et B :

$$\int_C F \cdot dr = f(B) - f(A).$$

Remarque : Si F est un champ de vecteur qui dérive d'un potentiel f alors :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y)).$$

Si $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ de classe C^1 , alors F dérive d'un potentiel f si :

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Donc un champ de vecteur $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ de classe C^1 dérive d'un potentiel f si :

$$\boxed{\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}}.$$

Esquisse de la démonstration dans \mathbb{R}^2 :

Soient $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$ un champ de vecteur et $f(x,y)$ un champ scalaire tel que: $\nabla f(x,y) = F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$.

Soit C est une courbe lisse qui relie le point $A = (x(a), y(a))$ au point $B = (x(b), y(b))$ déterminée par la paramétrisation $r(t) = (x(t), y(t))$

Si on considère la fonction $g(t) = f(x(t), y(t))$, en utilisant la règle de chaîne (composition), on obtient:

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = M(x,y) \frac{dx}{dt} + N(x,y) \frac{dy}{dt} = g'(t)$$

et donc,

$$df(x(t), y(t)) = \left(M(x,y) \frac{dx}{dt} + N(x,y) \frac{dy}{dt} \right) dt = g'(t) dt$$

$$df(x(t), y(t)) = M(x,y) dx + N(x,y) dy = dg = g'(t) dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent: } \int_C M(x,y) dx + N(x,y) dy &= \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) \\ &= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)) \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Exemple . Calculer $\int_C (y^2 + 2x + 4) dx + (2xy + 4y - 5) dy$,
où C est une courbe lisse reliant les deux points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Le champ de vecteurs $(y^2 + 2x + 4)i + (2xy + 4y - 5)j$ dérive du potentiel
 $f(x, y) = y^2x + x^2 + 4x + 2y^2 - 5y$ (à vérifier).
 Donc, $\int_C (y^2 + 2x + 4)dx + (2xy + 4y - 5)dy = f(1, 1) - f(0, 0) = 8 - 5 = 3$.
 Vérifier ce résultat en utilisant la courbe $y = x$.

Exemple . Calculer $\int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin(y))dy$, où C est une courbe lisse déterminée par: $r(t) = \pi \cos(t)i + \pi \sin(t)j$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

La courbe C relie les deux points $r(0) = (\pi, 0)$ et $r(\frac{\pi}{2}) = (0, \pi)$, le champ de vecteurs $(e^{-y} - 2x)i - (xe^{-y} + \sin(y))j$ dérive du potentiel :
 $f(x, y) = xe^{-y} - x^2 + \cos(y)$ (à vérifier).

Donc:

$$\begin{aligned} \int_C (e^{-y} - 2x)dx - (xe^{-y} + \sin(y))dy &= f(0, \pi) - f(\pi, 0) \\ &= \cos(\pi) - (\pi - \pi^2 + 1) = \pi^2 - \pi - 2. \end{aligned}$$

Exemple . Calculer

$$\int_C (e^x \sin(z) + 2yz)dx + (2xy + 2y)dy + (e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2)dz,$$

où C est une courbe lisse reliant les points $(0, 0, 0)$ au point $(1, -2, \pi)$.

Le champ de vecteurs le champ de vecteur:

$$(e^x \sin(z) + 2yz)i + (2xy + 2y)j + (e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2)k$$

dérive du potentiel $f(x, y, z) = e^x \sin(z) + 2yzx + y^2 + z^3 + c$. (à vérifier).

$$\text{Donc, } \int_C (e^x \sin(z) + 2yz)dx + (2xy + 2y)dy + (e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2)dz$$

$$= f(1, -2, \pi) - f(0, 0, 0) = \pi^3 - 4\pi + 4.$$

Exemple . Soit $F(x, y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y))$, déterminer $f(x, y)$ tel que :

$$(1) \quad \nabla f(x, y) = F(x, y) = (e^{-y} - 2x, -xe^{-y} - \sin(y)).$$

On a $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$, donc F dérive d'un potentiel f .

L'égalité (1) implique: (2) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = e^{-y} - 2x$

$$\text{et (3) } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -xe^{-y} - \sin(y).$$

En intégrant l'équation (1), on obtient:

$$f(x, y) = \int M(x, y)dx = \int (e^{-y} - 2x)dx = xe^{-y} - x^2 + h(y);$$

h est une fonction qui ne dépend que de la variable y . En dérivant par rapport à y , on obtient:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -xe^{-y} + h'(y) = -xe^{-y} - \sin(y) \Rightarrow h'(y) = -\sin(y)$$

$$\Rightarrow h(y) = \cos(y) + c.$$

Par conséquent: $f(x,y) = xe^{-y} - x^2 + \cos(y) + c$.

Considérons maintenant trois fonctions M, N, et R de trois variables telles que :

$$\text{grad}(f) = \nabla f(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Donc, on a :

$$(1) \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z), (2) \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z), (3) \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z).$$

Si la fonction f est de classe C^2 , de (1), (2) et (3), on a :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial z} = \frac{\partial N}{\partial z}.$$

Par conséquent $F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), R(x,y,z))$ dérive d'un potentiel f si :

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}},$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}},$$

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}}.$$

Exemple . Soit $F(x,y,z) = (e^x \sin(z) + 2yz, 2xz + 2y, e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2)$,

déterminer $f(x,y,z)$ tel que :

$$(1) \nabla f(x,y,z) = F(x,y,z).$$

L'égalité (1) implique:

$$(2) \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = M(x,y,z), (3) \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = N(x,y,z), (4) \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = R(x,y,z).$$

En intégrant l'équation (2), on obtient :

$$f(x,y,z) = \int M(x,y) dx = e^x \sin(z) + 2yzx + h(y,z);$$

h est une fonction qui ne dépend que des variables y et z . En dérivant par rapport à y , on obtient:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = e^x \sin(z) + \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} = 2xz + 2y \Rightarrow \frac{\partial h(y,z)}{\partial y} = 2y$$

$\Rightarrow h(y,z) = y^2 + g(z)$. En dérivant par rapport à z , on obtient:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x \cos(z) + 2xy + g'(z) = e^x \cos(z) + 2xy + 3z^2$$

$$\Rightarrow g'(z) = 3z^2 \text{ et donc } g(z) = z^3 + c.$$

Par conséquent: $f(x,y,z) = e^x \sin(z) + 2yzx + y^2 + z^3 + c.$

Intégrale curviligne complexe.

Définition. Soit C une courbe (chemin) dans le plan complexe C , $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction complexe. L'intégrale curviligne de f sur C , est notée : $\int_C f(z)dz$.

Si la représentation paramétrique d'une courbe ou chemin C dans le plan complexe est donnée par :

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

$$dz = dx + idy.$$

Donc,

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy);$$

$$\int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy + i(v(x,y)dx + u(x,y)dy));$$

$$\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy).$$

$\int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy); \int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy)$
des intégrales curvilignes dans R^2 .

On obtient alors :

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i \int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy).}$$

Si la fonction complexe $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ est holomorphe alors les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées

:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \quad (2).$$

Par conséquent les champs de vecteurs $(u(x,y), -v(x,y)), (v(x,y), u(x,y))$ découlent d'un potentiel; on obtient le théorème suivant :

Théorème 1: Si la fonction $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine connexe D . Alors, pour tout chemin lisse C joignant deux points z_1, z_2 , on a :

$$\boxed{\int_C f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),}$$

la fonction complexe $F(z)$ est holomorphe telle que $F'(z) = f(z)$.

Remarques:

1) Ce théorème généralise le théorème fondamental de calcul :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x),$$

le domaine est un intervalle $[a, b]$.

2) Dans le cas complexe, le domaine est connexe, c'est à dire, on ne peut l'écrire comme réunion de deux ouverts disjoints.

Exemples:

$$1) \int_0^{1+i} z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^2 = -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}.$$

$$2) \int_{-\pi i}^{\pi i} \cos(z) dz = [\sin(z)]_{-\pi i}^{\pi i} = 2 \sin(i\pi) = 2i \sinh(\pi).$$

$$3) \int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{\frac{z}{2}} dz = [2e^{\frac{z}{2}}]_{8+\pi i}^{8-3\pi i} = 2(e^{4-\frac{3\pi i}{2}} - e^{4+\frac{\pi i}{2}}) = 0 \text{ (pourquoi?).}$$

Théorème 2: Soit C une courbe lisse d'équation paramétrique :

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Si la fonction $f(z)$ est une fonction continue sur C . Alors :

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt &= \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_C (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) \\ &= \int_C u(x,y) dx - v(x,y) dy + i \int_C (v(x,y) dx + u(x,y) dy) \\ &= \int_C f(z) dz. \end{aligned}$$

Remarque:

Si la fonction $f(z)$ n'est pas holomorphe, on utilise le théorème (2).

Exemples: 1) Calculer $\int_C \frac{dz}{z}$, C : le cercle trigonométrique $x^2 + y^2 = 1$.

$$C : z(t) = \cos(t) + i \sin(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad z'(t) = -\sin(t) + i \cos(t) = ie^{it}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = e^{-it},$$

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = i2\pi.$$

2) Calculer $\int_C \operatorname{Re}(z) dz$, $C : C_1 \cup C_2$,

C_1 : Le segment reliant les points 0 et 1,

C_2 : Le segment reliant les points 1 et $1 + 2i$.

La représentation paramétrique de C_1 :

$$z(t) = t, \quad z'(t) = 1, \quad \operatorname{Re}(z) = x(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La représentation paramétrique de C_2 :

$$z(t) = 1 + it, \quad z'(t) = i, \quad \operatorname{Re}(z) = x(t) = 1, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

$$\int_C \operatorname{Re}(z) dz = \int_{C_1} \operatorname{Re}(z) dz + \int_{C_2} \operatorname{Re}(z) dz;$$

$$\int_0^1 t dt + \int_0^2 idt = \frac{1}{2} + i2.$$

Exercice:

$$\text{Démontrer que } \int_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{si } m = -1 \\ 0, & \text{si } m \neq -1, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

C : cercle de centre z_0 et de rayon r .

Définitions :

C est un chemin reliant deux points A et B est fermé si $A = B$.
 C est chemin simple s'il ne contient pas de points doubles, triples, etc...

Si C est fermé, on note $\oint_C f(z) dz$.

Illustrations.

Théorème d'intégrale de Cauchy:

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe sur un domaine simplement connexe D ,
 C est une courbe simple fermée dans D . Alors :

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Exemples : 1)

$$\oint_C \cos(z) dz = 0,$$

$$\oint_C e^z dz = 0,$$

$$\oint_C z^n dz = 0; n = 1, 2, \dots$$

C n'importe quel chemin simple fermé dans un domaine connexe.

2) Si C est le cercle trigonométrique, C est une courbe simple fermée,

$$\oint_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} i dt = i2\pi;$$

car la fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe en 0 contenu dans le disque D .

Remarque. L'intégrale $\oint_C f(z) dz$ peut être égale à 0, même si la fonction

n'est pas holomorphe sur D .

Exemple: $\oint_C \frac{1}{z^2} dz = 0$, C un cercle de centre 0. La fonction $\frac{1}{z^2}$ n'est pas

holomorphe sur le disque D de centre 0.

Indépendance du chemin.

Théorème. Soient z_1 et z_2 dans le plan complexe C .

Si $f(z)$ est holomorphe sur un domaine D simplement connexe, alors l'intégrale ne dépend pas du chemin simple rejoignant z_1 à z_2 .

Si C_1 : chemin simple rejoignant z_1 à z_2 , C_2 chemin rejoignant z_1 à z_2 :

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

Démonstration: C_1 : chemin simple rejoignant z_1 à z_2

– C_2 : chemin inverse de C_2 simple rejoignant z_2 à z_1 . On a :

$$\int_{C_2} f(z) dz = - \int_{-C_2} f(z) dz$$

Si C_1 et C_2 ont seulement z_1 et z_2 en commun, alors $C_1 \cup -C_2$ est une courbe simple fermée, d'après le théorème, on a :

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup -C_2} f(z) dz &= 0 \\ \int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_2} f(z) dz &= 0 \\ \int_{C_1} f(z) dz &= - \int_{-C_2} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz. \end{aligned}$$

Si C_1 et C_2 ont plusieurs points d'intersection commun, on peut utiliser des subdivisions.

Illustrations, Exercices et commentaires.

- 1) Calculer $\int_C e^{2z} dz$; C le segment joignant les points πi à $2\pi i$.

holomorphe $\int_{\pi i}^{2\pi i} e^{2z} dz = \left. \frac{e^{2z}}{2} \right|_{\pi i}^{2\pi i} = \frac{e^{4\pi i} - e^{2\pi i}}{2} = 0$

- 2) Calculer $\oint_C (z + \frac{1}{z}) dz$; C le cercle unité orienté positivement.

$z^2 + \frac{1}{z^2} = 1 \Rightarrow \oint_C z dz + \oint_C \frac{1}{z} dz = 0 + 2\pi i = 2\pi i$

- 3) Calculer $\int_C \frac{1}{\cos^2(z)} dz$; C le segment joignant les points $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}i$.

tant

- 4) Calculer $\int_C z e^{\frac{z^2}{2}} dz$; C le segment joignant les points i à 1 .

X de fait holomorphe

Théorème (Formule de Cauchy):

Soit une fonction holomorphe $f(z)$ sur un domaine simplement connexe D , pour tout z_0 dans D et toute courbe fermée entourant z_0 alors:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

La courbe C est orientée positivement (dans ce cas le sens contraire d'une montre).

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Esquisse de la démonstration:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \oint_C \frac{dz}{z - z_0} + \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Exemples:

- 1) $\oint_C \frac{e^z dz}{z - 2} = 2\pi i e^2$, C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = 2$.

2) $\oint_C \frac{z^3 - 6dz}{2z - i} = \oint_C \frac{\frac{1}{2}(z^3 - 6)}{z - \frac{i}{2}} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z^3}{3} - 6 \right) \right]_{z=\frac{i}{2}} = \frac{\pi}{8} - 6\pi i$

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = \frac{i}{2}$, orientée positivement.

- 3) Calculer $\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz$ sur $C : |z - 1| = \frac{1}{2}$ orientée positivement.

On a : $\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \oint_C \frac{z^2 + 1}{(z - 1)(z + 1)} dz = \oint_C \frac{\frac{z^2 + 1}{z + 1}}{z - 1} dz.$

-1 n'appartient pas à D ; donc la fonction $\frac{z^2 + 1}{z + 1}$ est holomorphe sur D ,

De plus C entoure 1 , et on a :

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = \left[\frac{z^2 + 1}{z + 1} \right]_{z=1} 2\pi i = 2\pi i.$$

D. limite $\left\{ \frac{f(z)}{g(z)} \right\}_{z \rightarrow z_0}$

$$f'(z_0) = f'(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f''(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f'''(z_0) + \dots$$

Exercices :

1) Calculer $\oint_C \frac{z^2 - 4}{z^2 + 4} dz$; $|z - 1| = 2$ orientée positivement.

2) Calculer $\oint_C \frac{e^{3z}}{3z - i} dz$; $|z| = 1$ orientée positivement.

3) Calculer $\oint_C \frac{dz}{z^2 - 1}$; $|z + 1| = 1$ orientée positivement.

4) Calculer $\oint_C \frac{\ln(z + 1)}{z^2 + 1} dz$; $|z + 2i| = 2$ orientée positivement.

5) Calculer $\oint_C \frac{\sin(z) dz}{z^2 - 2iz}$; $|z| = 3$ orientée sens contraire de la montre
et $|z| = 1$ orientée même sens de la montre.

Théorème (Formule des dérivées de Cauchy):

Soit une fonction holomorphe $f(z)$ sur un domaine simplement connexe D ,
ses dérivées d'ordre n sont holomorphes alors :

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

La courbe C est orientée positivement.

Exemples :

1) $\oint_C \frac{\cos(z) dz}{(z - i\pi)^2} = [2\pi i \cos'(z)]_{z=i\pi} = -2\pi i \sin(\pi i) = 2\pi \sinh(\pi),$

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = \pi i$. (C orientée positivement).

2) $\oint_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + i)^3} dz = [\pi i (z^4 - 3z^2 + 6)'']_{z=i} = [\pi i (12z^2 - 6)]_{z=i} = -18\pi i.$

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = i$. (C orientée positivement).

3) $\oint_C \frac{e^z}{(z - 1)^2 (z^2 + 4)} dz = \left[2\pi i \left(\frac{e^z}{(z^2 + 4)} \right)' \right]_{z=1} = \left[2\pi i \left(\frac{e^z (z^2 + 4) - e^z 2z}{(z^2 + 4)^2} \right) \right]_{z=1} = \frac{6e\pi}{25} i.$

C n'importe quelle courbe fermée entourant $z = 1, \pm 2i$ à l'extérieur du domaine.
(C orientée positivement).

Exercice :

1) Calculer $\oint_C \frac{\sin(4z)}{(z - 4)^3} dz$; $C : |z| = 5, |z - 3| = \frac{3}{2}$ orientée positivement..

SERIES NUMERIQUES

Suites réelles (Quelques rappels).

Définitions et exemples.

- Une suite numérique réelle est une application de N dans R qu'on note: $(u_n)_{n \in N}$, $(v_n)_{n \in N}, \dots$; u_n est appelé le $n^{ième}$ terme de la suite (u_n) .

Exemple : La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est une suite infinie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$.

- Une suite numérique (u_n) converge vers l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall n \in N, (n \geq M \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

On note : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

- Si une suite (u_n) ne converge pas, on dit que la suite (u_n) est divergente.

- Une suite (u_n) est dite majorée s'il existe $A \in R$ tel que $\forall n \in N, u_n \leq A$: A est appelé un majorant de la suite (u_n) .

- Une suite (u_n) est dite minorée s'il existe $B \in R$ tel que $\forall n \in N, u_n \geq B$: B est appelé un minorant de la suite (u_n) .

- Une suite numérique (u_n) est dite bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

$$(u_n) \text{ est bornée} \Leftrightarrow \exists A, \forall n \in N, |u_n| \leq A.$$

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

Exemple: La suite géométrique (r^n) converge si et seulement si $|r| < 1$ ou $r = 1$.

Si $|r| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$. Si $r = 1$, la suite est stationnaire.

- Une suite (u_n) est dite croissante si et seulement si $\forall n \in N, u_n \leq u_{n+1}$.

- Une suite (u_n) est dite décroissante si et seulement si $\forall n \in N, u_{n+1} \leq u_n$.

- Une suite (u_n) est dite strictement croissante si et seulement si $\forall n \in N, u_n < u_{n+1}$.

- Une suite (u_n) est dite strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in N, u_{n+1} < u_n$.

- Une suite (u_n) est dite monotone si et seulement si (u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante.

Théorème :

Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.

Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

Exemple : La suite $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante et est majorée par 1 la borne supérieure; $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ converge vers 1.

Toute suite réelle croissante non majorée converge vers ∞ .

Toute suite réelle décroissante non minorée converge $-\infty$.

Séries numériques réelles.

Définition : Soit (u_n) une suite numérique réelle infinie, la somme infinie :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

est appelée série numérique de terme générale u_n qu'on note : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

La suite définie par $S_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ est appelée la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série.

Définition : La série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est dite convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = S$ si la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$). Si la suite S_n est divergente alors la série est dite divergente.

Exemples : 1) La série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est appelée série géométrique, $a \neq 0$.

La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ est convergente $\Leftrightarrow |r| < 1$ et $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

On a $S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$, si $r = 1$, $S_n = (n+1)a$ diverge.

Si $r \neq 1$,

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \dots + ar^n) - (ar + ar^2 + \dots + ar^{n+1})$$

$$(1-r)S_n = a - ar^{n+1}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Par conséquent, la suite S_n diverge si $|r| \geq 1$ et converge vers $\frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ converge vers $\frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$.

2)

Si $|x| < 1$ alors la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Si $|x| \geq 1$ alors la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge.

3) La série télescopique $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)}$ est convergente vers 1.

On remarque que : $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{(i+1)}$, pour tout $i = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} \text{Donc, } S_n &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n)} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Théorème: Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ convergent alors $\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} cu_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} cu_n = c \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Théorème: Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

On a $S_n - S_{n-1} = u_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$.

La réciproque est fausse.

Exemple: La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge même si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{En effet, } S_n &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Donc $S_n \geq \sqrt{n} \rightarrow \infty$, quand $n \rightarrow \infty$, par conséquent $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

La contraposée du théorème est aussi utilisée :

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ diverge.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3n^4 + 5n}$ diverge car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^4}{3n^4 + 5n} \right) = \frac{1}{3} \neq 0$.

Séries à termes positifs et Tests de convergence.

Définition. Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Proposition : Une série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est à termes positifs est convergente si et seulement si la suite numérique $S_n = \sum_{i=0}^n u_i$ majorée.

\Rightarrow) évident.

\Leftarrow) La suite S_n est croissante car $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$ et majorée donc converge.

Théorème : (Test d'intégrale).

Soit f une fonction continue, décroissante, positive sur l'intervalle $[1, \infty[$, et $u_n = f(n)$. Alors:

La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente \Leftrightarrow L'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x) dx$ est convergente.

On peut remplacer l'intervalle $[1, \infty[$ par $[n_0, \infty[$.

Exemple : 1) La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue, décroissante, positive, de plus $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(x) - \ln(1)] = \infty$.

2) Pour $p > 0, p \neq 1$, $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{t^{1-p}}{1-p} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$ converge si $1-p < 0$ et diverge si $1-p > 0$.

La fonction $f(x) = \frac{1}{x^p}$ est continue, décroissante, positive, si $p > 0$.

On obtient le résultat suivant :

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ et diverge si $0 < p \leq 1$.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge car $2 > 1$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge car $0 < \frac{1}{2} \leq 1$.

Théorème : (Test de comparaison).

Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$ (à partir d'un certain rang n_0)

Alors:

a) La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente \Rightarrow La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

b) La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente \Rightarrow La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est divergente.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n^2 - 3}$ est divergente car $\frac{n}{2n^2 - 3} \geq \frac{1}{2n} \geq 0$,
et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème : (Test de comparaison limite).

Si $0 \leq u_n$, $0 < v_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$; $0 < l < \infty$.

Alors:

La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente \Leftrightarrow La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{2n^3 - 3n^2 + 10}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-5}{2n^3 - 3n^2 + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0$,

on ne peut pas conclure, on pose $v_n = \frac{1}{2n^2}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n-5}{2n^3 - 3n^2 + 10}}{\frac{1}{2n^2}} = 1$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-5}{2n^3 - 3n^2 + 10}$ converge.

Théorème : (Test quotient).

Si $0 \leq u_n$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$.

Alors:

a) Si $\rho < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente

b) Si $\rho > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est divergente

c) Si $\rho = 1$, on ne peut pas conclure.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \text{sur }]-1, 1[.$$

De même, $\text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$
 $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots \text{sur }]-1, 1[$

On obtient :

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots \text{sur }]-1, 1[.$$

Exemple : Le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ est $]-\infty, \infty[$ (vérifier).

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; $f(0) = 1$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = f(x)$.

Par conséquent, $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ sur $]-\infty, \infty[$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \text{sur }]-\infty, \infty[$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} \dots \text{sur }]-\infty, \infty[$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots \text{sur }]-\infty, \infty[$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots \text{sur }]-\infty, \infty[$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \dots \text{sur }]-\infty, \infty[$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \dots \text{sur }]-\infty, \infty[.$$

SERIES NUMERIQUES COMPLEXES

Définition : Soit (z_n) une suite numérique complexes infinie, la somme infinie :

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots$$

est appelée série numérique de terme générale z_n qu'on note : $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Définition : La série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est dite convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$ si la suite des sommes partielles (S_n) converge vers S ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$). Si la suite S_n est divergente alors la série est dite divergente.

Proposition: Si $z_n = x_n + iy_n$ alors :

La série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge \Leftrightarrow La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergent.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est la partie réelle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ est la partie imaginaire de la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Exemple: La série $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} + i\frac{1}{n^2})$ diverge car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^3} + i\frac{1}{n^2})$ converge car les séries $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^3})$ et $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2})$ convergent,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^3} + i\frac{1}{n^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^3}) + i \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2}).$$

Théorème: Si $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ convergent alors $\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n.$$

Pour tout $c \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} cz_n = c \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Théorème: Si une série complexe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ alors la série complexe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.

Définition. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = |z_0| + |z_1| + |z_2| + |z_3|$ converge; $|z_n|$ est le module de z_n .

Proposition : Si une série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est dite absolument convergente alors elle est convergente.

Théorème : (Test de comparaison).

Si $|z_n| \leq v_n$ pour $n \geq n_0$ (à partir d'un certain rang n_0). Alors:

La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est convergente \Rightarrow La série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est absolument convergente.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{2n^2}$ est absolument convergente,

car $\left| \frac{1+i}{2n^2} \right| \leq \frac{|1+i|}{2n^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2n^2}$ converge.
 La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2 - 2i}$ est absolument convergente,
 car $\left| \frac{i^n}{n^2 - 2i} \right| \leq \frac{1}{|n^2 - 2i|} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4 + 4}} \leq \frac{1}{n^2}$.

Théorème : (Test quotient).

On considère une série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \rho$.

Alors:

a) Si $\rho < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est absolument convergente

b) Si $\rho > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ est divergente

c) Si $\rho = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple : La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(30+2i)^n}{n!}$ est absolument convergente,

$$\text{car } \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \frac{|30+2i|}{n+1} \rightarrow 0.$$

Séries entières complexes:

Définition. On appelle série entière en $(z - z_0)$, une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

z, z_0, a_0, a_1, \dots , z_0 est appelée centre de la série.

La série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ est appelée Série de Taylor.

Si $z_0 = 0$, on obtient la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ appelée série de Maclaurin.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, en utilisant le test quotient,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1} n!}{(n+1)! z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{(n+1)} = 0,$$

la série converge absolument sur C .

Théorème (Rayon de convergence):

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absolument sur un disque de la forme :

$$a) \{z \in C / |z - z_0| < R\}, \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

$$b) z = z_0; \text{ si } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 0.$$

$$c) C; R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \infty.$$

R est appelé le rayon de convergence de la série.

Exemple : On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z - 3i)^n$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| = \frac{1}{4}.$$

Donc, la série converge absolument sur le disque ouvert de centre $3i$ et de rayon $\frac{1}{4}$, et donc converge.

On considère la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(1+i)^n} (z-5)^n$. La série converge absolument sur le disque ouvert de centre 5 et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (à vérifier).

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ alors:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0); f^{(n)}(z) \text{ la dérivée } n^{\text{ième}} \text{ de } z.$$

Si on remplace $f^{(n)}(z_0)$ par la formule $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$; on obtient;

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz;$$

C n'importe quelle courbe fermée simple entourant z_0 , et $f(z)$ holomorphe sur l'intérieur du contour C .

Exemples :

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.}$$

$$\boxed{\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad |z| < 1.}$$

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots \quad |z| < 1.}$$

$$\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad \text{sur } C}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \dots \quad \text{sur } C$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \dots \quad \text{sur } C$$

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} \dots \quad \text{sur } C$$

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} \dots \quad \text{sur } C$$

Si on pose $z = iy$, $y \in R$, on a :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}.$$

En remarquant que : $(i)^{2k} = (-1)^k$ et $(i)^{2k+1} = (-1)^k i$, on a :

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n (y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (y)^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (y)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

On obtient la formule d'Euler :

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y).$$

Séries de Laurent et résidus

Les séries de Laurent généralisent les séries de Taylor pour développer en séries entières en termes de $z - z_0$ des fonctions $f(z)$ qui présentent des singularités en z_0 .

Exemple: $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$ est une fonction non définie en $z_0 = 0$.

La fonction $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$

Si $z \neq 0$, On a $f(z) = \frac{\cos(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots$

pour tout z tel que $|z| > 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$ est appelée la série de Laurent

de la fonction $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$.

Définition: Si la fonction $f(z)$ n'est pas holomorphe au voisinage de z_0 , le point z_0 est appelé point singulier.

S'il existe un disque de centre z_0 privé du point z_0 tel que la fonction est holomorphe, le point z_0 est appelé point singulier isolé.

Définition: Une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

est appelée série de Laurent de centre z_0 .

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ est appelée la partie singulière.

Théorème. Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine :

$$D = \{z \in \mathbb{C} / r_1 < |z - z_0| < r_2\}$$

D couronne ouverte ou anneau ouvert. Alors, la fonction $f(z)$ admet un développement unique en série de Laurent de centre z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n};$$

Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) (z - z_0)^{n-1} dz.$$

C une courbe fermée entourant z_0 et orientée positivement dans D .

Définition: S'il existe m tel que $b_m \neq 0$ tel que $b_n = 0$ pour tout $n > m$, z_0 est appelé un pôle d'ordre m .

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \frac{b_{m-1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots \text{ sur } D.$$

Si $m = 1$, z_0 est appelé un pôle simple.

S'il existe les b_m sont infinis, on dit que z_0 est un point singulier essentiel.

Illustration

Remarque : On peut aussi représenter $f(z)$ par :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Exemples :

1) Déterminer la série de Laurent de centre 0 de la fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^5}$.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{-5} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} z^2 \dots |z| > 0. \end{aligned}$$

2) Déterminer la série de Laurent de centre 0 de la fonction $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$.

On pose $Z = \frac{1}{z}$,

$$\begin{aligned} f(Z) &= \frac{e^Z}{Z^2} = \frac{1}{Z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Z)^{n-2}}{n!} = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{2} + \frac{Z}{3!} + \frac{Z^2}{4!} + \dots; z \neq 0. \\ f(z) &= z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots; |z| > 0. \end{aligned}$$

3) Si $|z| > 1$, donner le développement en séries de Laurent de la fonction $\frac{1}{1-z}$.

On a : $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}$, et $|\frac{1}{z}| < 1$; donc $\frac{1}{(1-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^n$.

Donc,

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^{n+1} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots; |z| > 1.$$

4) Déterminer le développement en série de Laurent de la fonction $\frac{1}{z^3 - z^4}$ de centre 0.

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 \dots 0 < |z| < 1.$$

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = -\frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^{n+1} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \dots; |z| > 1.$$

Définition. Si la fonction $f(z)$ admet un développement en série de Laurent de centre z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n};$$

On a :

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz.$$

C une courbe fermée entourant z_0 et orientée positivement dans D .

Le coefficient b_1 est appelé le résidu de la fonction $f(z)$ au point $z = z_0$, et on $b_1 = \text{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Exemples : 1) Intégrer la fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4}$ sur le cercle unité

$C : x^2 + y^2 = 1$, orienté positivement (le sens contraire de l'aiguille d'une montre).

$$\begin{aligned} f(z) &= z^{-4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{z}{120} - \frac{1}{5040} z^3 \dots |z| > 0. \end{aligned}$$

La fonction $f(z)$ a un pôle d'ordre 3 au point 0, $b_1 = \text{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{6}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\sin(z)}{z^4} dz, \\ \oint_C \frac{\sin(z)}{z^4} dz &= -\frac{\pi i}{3}. \end{aligned}$$

2) Intégrer la fonction $f(z) = \frac{1}{z^3(1-z)}$ sur le cercle :

$C : |z| = \frac{1}{2}$, orienté positivement (le sens contraire de l'aiguille d'une montre).

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 \dots 0 < |z| < 1.$$

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = -\frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{z})^{n+1} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \dots; |z| > 1.$$

La fonction $f(z)$ deux points singliers 0, et 1, 1 n'est pas entouré par C ,

$b_1 = \text{Res}_{z=0} f(z) = 1$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z^3(1-z)} dz, \\ \oint_C \frac{1}{z^3(1-z)} dz &= 2\pi i. \end{aligned}$$

Calcul des résidus:

Pôles simples :

1) Si la fonction $f(z)$ admet un pôle simple au point z_0 alors:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

2) Si la fonction $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ admet un pôle simple au point $z_0, p(z_0) \neq 0$ alors:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Exemple:

La fonction $f(z) = \frac{(9z + i)}{(z^3 + z)}$ admet un pôle simple au point $z_0 = i$:

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{(9z + i)}{(z^3 + z)} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{(9z + i)}{(z^3 + z)} = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{(9z + i)}{z(z + i)(z - i)} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

On peut utiliser la deuxième méthode :

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{(9z + i)}{(z^3 + z)} = \frac{(9z + i)}{(z^3 + z)'} \Big|_{z=i} = \left[\frac{(9z + i)}{3z^2 + 1} \right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

Pôles d'ordre m :

Si la fonction $f(z)$ admet un pôle d'ordre m au point z_0 alors:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}.$$

$[(z - z_0)^m f(z)]^{(m-1)}$ la dérivée d'ordre m-1 de la fonction $(z - z_0)^m f(z)$.

Exemple:

La fonction $f(z) = \frac{50z}{(z + 4)(z - 1)^2}$ admet un pôle d'ordre 2 au point $z_0 = 1$:

$$\operatorname{Res}_{z=1} \frac{50z}{(z + 4)(z - 1)^2} = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow 1} [(z - 1)^2 f(z)]^{(1)} \\ = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{50z}{(z + 4)} \right]' = 8.$$

Théorème. Si $f(z)$ est une fonction holomorphe sur un domaine D de frontière C fermée (D entouré par C) sauf sur un nombre fini de points $z_1, z_2, z_3, \dots, z_k$ dans C. Alors, l'intégrale de la fonction $f(z)$ sur C orientée positivement dans D.

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Exemple: Calculer l'intégrale de la fonction $f(z) = \frac{4 - 3z}{(z^2 - z)}$ sur C entourant 0, 1;

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{4 - 3z}{z(z - 1)} = -4, \operatorname{Res}_{z=1} \frac{4 - 3z}{z(z - 1)} = 1 \text{ à vérifier.}$$

Donc,

$$\oint_C \frac{4 - 3z}{(z^2 - z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \operatorname{Res}_{z=z_j} f(z) = 2\pi i(-4 + 1) = -6\pi i.$$

Indications(Devoir).

Exercice I. 1) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}$. Le domaine de convergence $]-4, 0[$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{\sqrt{n^4+1}}$. Le domaine de convergence $\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-\pi)^n}{3^n}$. Le domaine de convergence $]-3+\pi, 3+\pi[$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2+3i}{5-i}\right)^n (z+\pi i)^n$. Le centre de la série $z = -\pi i$, le rayon $\sqrt{2}$.

2) On peut supposer que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution sur son domaine de convergence.

Donc $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$, par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots + a_{n-2}x^{n-1} + \dots$$

On obtient : $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}a_0; a_3 = \frac{1}{3}a_1; a_4 = \frac{1}{3}a_1 \dots$;

on a : $a_n = \frac{1}{n} a_{n-2}$. Par récurrence $a_{2k+1} = 0; a_{2k} = \frac{1}{2^k} \frac{1}{k!} a_0$.

$$\begin{aligned} \text{Supposons } a_{2k} &= \frac{1}{2^k} \frac{1}{k!} a_0, \quad a_{2k+2} = \frac{1}{2k+2} a_{2k} = \frac{1}{2(k+1)} \frac{1}{2^k} \frac{1}{k!} a_0 \\ &= \frac{1}{2^{k+1} 2(k+1)} \frac{1}{k!} a_0 = \frac{1}{2^{k+1} (k+1)!} a_0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} = a_0 e^{\frac{x^2}{2}} \text{ sur le domaine de convergence } R.$$

De plus, $y(0) = a_0 e^0 = a_0 = 1$ et donc $y = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Exercice II.

$$\begin{aligned} \text{On développe la fonction } \frac{\sin(t)}{t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}; \\ \frac{1}{z^3} \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt &= \frac{1}{z^3} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} dt \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} t^{2n+1} \right]_0^z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} z^{2n-2} \\ &= \frac{1}{z^3} \int_0^z \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!3} + \frac{z^2}{5!5} - \dots \end{aligned}$$

$$2) \frac{\sin(z)}{(z - \frac{\pi}{4})^3} \quad z_0 = \frac{\pi}{4}.$$

On pose $Z = z - \frac{\pi}{4}$, $\sin(z) = \sin(Z + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(Z) + \cos(\frac{\pi}{4}) \sin(Z)$

En développant, $\cos(Z)$ et $\sin(Z)$ autour de 0;

$$\sin(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} Z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!} Z^{2n+1} \right); \quad R = \infty.$$

$$\frac{\sin(z)}{(z - \frac{\pi}{4})^3} = \frac{\sqrt{2}}{2(z - \frac{\pi}{4})^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (z - \frac{\pi}{4})^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1!} (z - \frac{\pi}{4})^{2n+1} \right).$$

$$\frac{\sin(z)}{(z - \frac{\pi}{4})^3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{(z - \frac{\pi}{4})^3} + \frac{1}{(z - \frac{\pi}{4})^2} - \frac{1}{2!(z - \frac{\pi}{4})} \right) - \frac{1}{3!} + \frac{(z - \frac{\pi}{4})}{4!} + \dots$$

$$b) z^2 \sinh\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)! z^{2n-1}} = z + \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^3} ; R = \infty.$$

Exercice III.

$$a) \oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2 - 3iz}, C : |z| = 1.$$

$\frac{\cosh(z)}{z^2 - 3iz} = \frac{\cosh(z)}{z(z - 3i)}$, pôle simple au point $z = 0$ entouré par C ,
pôle simple au point $z = 3i$ non entouré par C .

$$\text{Résidus}_{z=0} = \left[\frac{\cosh(z)}{(z - 3i)} \right]_{z=0} = \frac{i}{3}$$

$$\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2 - 3iz} = 2\pi i \left(\frac{i}{3} \right) = -\frac{2\pi}{3}.$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos(\theta)}. \text{ on pose } z = e^{i\theta}. C : \text{le cercle unité } x^2 + y^2 = 1.$$

$$\text{on a } \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \text{ car } \frac{1}{z} = e^{-i\theta}, dz = i e^{i\theta} d\theta$$

et donc $\frac{dz}{iz} = d\theta$. En utilisant le changement de variables, on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos(\theta)} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2} - \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2} (z^2 - 2\sqrt{2}z + 1)}$$

$$= -\frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}.$$

Pôle simple au point $z = -1 + \sqrt{2}$ entouré par C , car $|-1 + \sqrt{2}| < 1$

Pôle simple au point $z = 1 + \sqrt{2}$ non entouré par C , car $|1 + \sqrt{2}| > 1$.

$$\text{Res}_{z=-1+\sqrt{2}} = \lim_{z \rightarrow -1+\sqrt{2}} \frac{(z - \sqrt{2} + 1)}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -1+\sqrt{2}} \frac{1}{(z - \sqrt{2} - 1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Par conséquent, } -\frac{2}{i} \oint_C \frac{dz}{(z - \sqrt{2} - 1)(z - \sqrt{2} + 1)} = -\frac{2}{i} (2\pi i (-\frac{1}{2})) = 2\pi.$$

Exercice VI. Déterminer le développement en série de Fourier

$$\text{de la fonction périodique: } f(x) = \begin{cases} -1 & -2 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right) + \frac{1}{7} \sin\left(\frac{7\pi}{2}x\right) + \dots \right)$$

En déduire la somme de la série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

$$x = 0, f(0) = \frac{1 - (-1)}{2}$$

$$= 1 = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right)$$

$$\text{Et donc } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

SERIES DE FOURIER

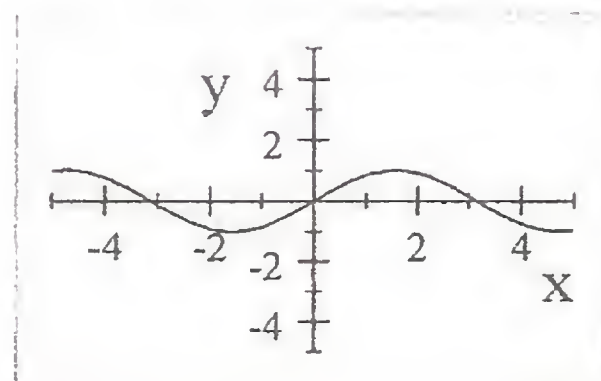
Quelques Rappels.

Définition : Une fonction $f(x)$ est dite périodique s'il existe p tel que : pour tout $x \in D_f$ $f(x+p) = f(x)$, le plus petit p est appelé période de la fonction f . Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(x+np) = f(x)$.

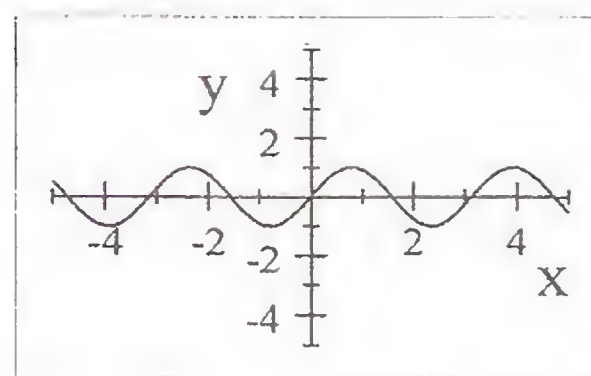
Exemples : La fonction $f(x) = \cos(nx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

La fonction $f(x) = \sin(nx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$$y = \sin(x)$$



$$y = \sin(2x)$$



Une fonction $f(x)$ est dite impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Une fonction $f(x)$ est dite paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Propriétés (Rappels): 1) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction impaire intégrable :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction paire intégrable :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

3) Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(px) dx = 0, \text{ si } n \neq p. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(px) dx = \pi, \text{ si } n = p. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = 0, \text{ si } n \neq p. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \pi, \text{ si } n = p. \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(px) dx = 0. \end{cases}$$

On peut utiliser les formules suivantes / suffit d'utiliser les formules de la forme :

$$\cos(nx) \sin(px) = \frac{1}{2} [\cos((n+p)x) + \cos((n-p)x)].$$

$$\sin(nx) \sin(px) = \frac{1}{2} [\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x)].$$

Définition : On appelle série de Fourier ou série trigonométrique une série de la forme :

$$a_0 + (a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)) + \dots + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) + \dots$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

$a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ des coefficients constants appelés les coefficients de Fourier.

Si la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge vers $f(x)$ alors

$f(x+2\pi) = f(x)$, la série de Fourier est périodique de période 2π .

Si la série $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge vers $f(x)$;

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Si on peut intégrer terme à terme, on obtient :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n 0 + b_n 0) = 2\pi a_0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(px) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \cos(px) dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px) \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px) \sin(nx) dx).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(px) dx = \pi a_p.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(px) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \sin(px) dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px) \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(px) \sin(nx) dx).$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(px) dx = \pi b_p.$$

On peut alors les coefficients de Fourier par formules suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

On peut développer des fonctions périodiques non continues en séries de Fourier.

Par exemple, déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π .

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

La fonction n'est pas définie au point $x = 0, x = \pm\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} (\int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} -dx) = \frac{1}{2\pi} (\int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} -dx) = \frac{1}{2\pi} (\pi - \pi) = 0.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} (\int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} -\cos(nx) dx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} (\int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} -\sin(nx) dx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} \right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos(0) - \cos(n(-\pi))}{n} - \frac{\cos(nx) - \cos(0)}{n} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - \cos(n\pi)}{n} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right).$$

Par conséquent, $b_n = 0$ si n est pair et $b_n = \frac{4}{n\pi}$ si n est impair :

$$b_1 = \frac{4}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4}{5\pi}, \dots$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right).$$

Si $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient $1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sin(3\frac{\pi}{2})}{3} + \frac{\sin(5\frac{\pi}{2})}{5} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right)$.

On a alors la valeur de la série numérique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \left(1 + \frac{-1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right) = \frac{\pi}{4}$$

Fonction paire et impaire.

1) Si la fonction f est une fonction paire alors les fonctions $f(x) \sin(nx)$ sont impaires pour $n = 1, 2, 3, \dots$, les fonctions $f(x) \cos(nx)$ sont paires pour $n = 1, 2, 3, \dots$.

Par conséquent, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ et $b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Si la fonction f est paire et périodique de période 2π définie sur $]0, \pi[$; les coefficients de Fouriers :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0$$

2) Si la fonction f est une fonction impaire alors les fonctions $f(x) \sin(nx)$ sont paires pour $n = 1, 2, 3, \dots$, les fonctions $f(x) \cos(nx)$ sont impaires pour $n = 1, 2, 3, \dots$.

Par conséquent, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ et $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Si la fonction f est impaire et périodique de période 2π définie sur $]0, \pi[$; les coefficients de Fouriers :

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Exemples.

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π , $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$.

La fonction $f(x)$ est impaire, donc $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Par partie, on a :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) = -\frac{2}{n} (-1)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = (2 \sin(x) - \frac{2 \sin(2x)}{2} + \frac{2 \sin(3x)}{3} - \dots).$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction paire, périodique de période 2π , $f(x) = x^2$, $0 < x < \pi$.

La fonction $f(x)$ est paire, donc $b_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{3} \pi.$$

Par partie, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(- \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) = \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$a_n = 0 \text{ si } n \text{ est paire, } a_n = \left(\frac{-4}{\pi n^2} \right) \text{ si } n \text{ est impair.}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi + \frac{-4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \dots \right).$$

Si $x = 0$, on obtient :

$$0 = \frac{1}{2}\pi + \frac{-4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right)$$

$$-\frac{1}{2}\pi = \frac{-4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right),$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right).$$

Fonctions de période $2L$.

Si f est une fonction de période $2L$, en utilisant le changement de variables $v = \frac{\pi x}{L}$, $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$.

On peut alors déterminer les coefficients de Fourier par formules suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Fonction paire et impaire.

1) Si la fonction f est paire et périodique de période $2L$ définie sur $]0, L[$; les coefficients de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 0$$

Si la fonction f est impaire et périodique de période 2π définie sur $]0, \pi[$; les coefficients de Fourier :

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Exemples.

Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique paire
 $f(x) = x^2, 0 < x < 1, L = 1.$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

$$a_n = \int_0^1 x^2 \cos\left(\frac{n\pi}{1}x\right) dx, n = 1, 2, \dots$$

Intégration par partie, on obtient : $a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2 \pi^2}$

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} (\cos(\pi x) - \frac{1}{4} \cos(2\pi x) + \frac{1}{9} \cos(3\pi x) - \dots;$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction impaire, périodique
 $f(x) = 1, 0 < x < 2.$

$$a_0 = 0, a_n = 0,$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \dots \right)$$

En faisant un changement de variable, on obtient :

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (c_n e^{inx}).$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Identité de Parseval :

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

si $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$ existe.